

Legge di composizione esterna

$$\begin{aligned} (\lambda, (x_1, x_2, x_3)) &\longrightarrow \lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \forall (x_1, x_2, x_3) &\in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ora che sappiamo che *insiemi* S siffatti esistono, senza attardarci con ulteriori esempi, possiamo sintetizzare tutto quello che essi hanno in comune, nella *definizione astratta di spazio vettoriale*.

L'aggettivo "astratta" segue dal fatto che nella *definizione* che daremo, non si fa riferimento ad alcun esempio concreto di *spazio vettoriale* in particolare.

3.3 Definizione astratta di spazio vettoriale

Dato un *insieme* non vuoto S , siano $u, v, w, \dots$ gli *elementi* di esso.

L'*insieme* S diviene uno *spazio vettoriale* V , i suoi *elementi* si chiamano *vettori* e si denotano con i *simboli* $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \dots$ se definiamo in esso *due leggi di composizione* di cui:

- una *interna* che, come abbiamo detto, chiamiamo *addizione*, la quale gode delle seguenti *proprietà*:

1. $\forall u, v, w \in S \Rightarrow (u + v) + w = u + (v + w)$
(proprietà associativa)
2. esiste in S un elemento, che denotiamo con 0 , tale che:

$$\forall u \in S \Rightarrow u + 0 = u$$

3. $\forall u \in S$ esiste in S un elemento u' tale che:

$$u + u' = 0$$

4. $\forall u, v \in S \Rightarrow u + v = v + u$
(proprietà commutativa)

- una *esterna* che, come abbiamo detto, chiamiamo *moltiplicazione di un numero* (scalare) *per un elemento di* S , la quale gode delle seguenti *proprietà*:

- 1'. $\forall u \in S \Rightarrow 1u = u$
 2'. $\forall u \in S, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$.

Le due *leggi di composizione* poi, sono legate tra loro dalle *due relazioni* seguenti che chiamiamo *proprietà distributive*:

- 1". $\forall u \in S, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
 2". $\forall u, v \in S, \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

La *definizione astratta di spazio vettoriale* viene anche chiamata *definizione assiomatica di spazio vettoriale* e le *otto proprietà* di cui godono (in complesso) le *due leggi di composizione* sono dette *assiomi*.

Nel seguito chiameremo *modello concreto di spazio vettoriale* o, più semplicemente *spazio vettoriale*, ogni *insieme non vuoto* S con *due leggi di composizione* (una interna ed una esterna), il quale verifica la *definizione astratta di spazio vettoriale*.

Lo *spazio vettoriale dei vettori geometrici* e l'*insieme* $S = \mathbb{R}^3$ con le *due leggi di composizione* (3.1) e (3.2) sono due *modelli concreti di spazio vettoriale*.

Prima di segnalare altri *modelli*, riflettiamo un momento sulla *definizione data*.

3.4 Riflessione sulla definizione astratta (o assiomatica) di spazio vettoriale

Per capire il senso della *definizione data*, facciamo un'analogia.

Pensiamo ai nomi comuni della nostra lingua, per esempio al nome "cane". Tale nome non denota un "particolare cane" ma riassume in sé le caratteristiche comuni a tutti i cani della Terra.

Analogamente, la *definizione astratta di spazio vettoriale* non si riferisce ad un *particolare spazio vettoriale* ma riassume le *proprietà comuni* a tutti gli *spazi vettoriali*, che sono appunto quelle che discendono dalle *leggi di composizione* che conferiscono la *struttura* di spazio vettoriale ai loro sostegni.

Ora che abbiamo chiarito il significato della *definizione data*, controlliamo se essa è stata "ben formulata".

Lo è stata, se in conseguenza delle operazioni definite in S , in ogni modello di *spazio vettoriale* V , sussistono le stesse proprietà che sussistono nello spazio vettoriale $\mathcal{V}$ dei vettori geometrici che è appunto un modello di esso.

Rileggiamo la definizione!

Le proprietà 2. e 3. in essa citate, dicono testualmente:

- esiste in S un elemento, che denotiamo con 0 , ...
- $\forall u \in S$ esiste in S un elemento u' ...

Ora, nel linguaggio matematico, dire “esiste un elemento ...” significa “esiste *almeno* un elemento ...” per cui le proprietà 2. e 3. da sole non garantiscono l'*unicità* degli elementi di cui esse assicurano l'*esistenza*. Noi abbiamo invece l'esigenza che *tali elementi* siano *unici* perchè nello *spazio vettoriale dei vettori geometrici*, l'elemento 0 e l'elemento u' di cui si parla nelle proprietà 2. e 3. sono rispettivamente il *vettore nullo* $\underline{0}$ ed il *vettore* $-\underline{u}$, *opposto del vettore* $\underline{u}$, i quali sono *unici* e la loro *unicità* segue dalle *operazioni* (leggi di composizione) definite in $\mathcal{V}$.

Tale considerazione ci fa allora venire il sospetto che la *definizione astratta di spazio vettoriale* (da noi data) sia “mal formulata” perchè sembra appunto non garantire l'*unicità* dei *vettori* sopra citati.

Tale sospetto è però fugato dai due *teoremi* seguenti.

Teorema 3.1 *In ogni spazio vettoriale V esiste un solo vettore $\underline{0}$ che verifica la proprietà 2.*

Dimostrazione

Ragioniamo per assurdo.

Se esistessero in V *due vettori* $\underline{0}$ e $\underline{0}'$, che verificassero la *proprietà 2.*, si avrebbe contemporaneamente:

$$\underline{0}' + \underline{0} = \underline{0}' \quad ^1 \quad (3.3)$$

¹Nella (3.3) si pensa $\underline{0}$ come il *vettore* di cui la *proprietà 2.* garantisce l'*esistenza* e pertanto, dovendo essere verificata l'*uguaglianza* $\underline{u} + \underline{0} = \underline{u}$, $\forall \underline{u} \in V$, lo è anche per $\underline{u} = \underline{0}'$. Nella (3.4) si scambiano i ruoli dei due vettori $\underline{0}$ e $\underline{0}'$.