

Se è $z = (0, 0)$, qualunque sia $n \geq 1$ si ha $\omega = (0, 0)$; se invece è $z \neq (0, 0)$ vedremo nel *paragrafo* 1.10 che esistono n numeri complessi che soddisfano la (1.11) quindi esistono n radici n -esime del numero complesso z .

Nel *paragrafo* 1.7 impareremo ad eseguire rapidamente le *operazioni* di *addizione*, *moltiplicazione*, *sottrazione* e *divisione*, che abbiamo definito nei *paragrafi* 1.1 ed 1.2 e successivamente nel *paragrafo* 1.10 a calcolare la *potenza n -esima* e le *radici n -esime* di un numero complesso z .

Vediamo intanto che relazione c'è tra l'insieme $\mathbb{C}$ che abbiamo costruito e l'insieme $\mathbb{R}$.

1.4 Relazione tra l'insieme $\mathbb{C}$ e l'insieme $\mathbb{R}$

L'obiettivo che ci siamo posti nel *paragrafo* 1.1 era quello di costruire un insieme “più ampio” di $\mathbb{R}$, quindi che contenesse $\mathbb{R}$ come sottoinsieme.

Poiché gli elementi di $\mathbb{R}$ sono numeri reali mentre quelli di $\mathbb{C}$, coppie ordinate di numeri reali, non potendo essere $\mathbb{R}$ sottoinsieme di $\mathbb{C}$, sembrerebbe che l'insieme $\mathbb{C}$ non avesse nulla a che fare con l'insieme che stiamo cercando.

Vediamo come stanno veramente le cose!

Se consideriamo il sottoinsieme $\mathbb{C}'$ di $\mathbb{C}$ così fatto

$$\mathbb{C}' = \{(a, b) \in \mathbb{C} : b = 0\},$$

constatiamo che:

1. la *somma* e il *prodotto* di due numeri di $\mathbb{C}'$ sono ancora numeri di $\mathbb{C}'$ ¹
2. il sottoinsieme $\mathbb{C}'$ può essere posto in *corrispondenza biunivoca* con l'insieme $\mathbb{R}$ al modo seguente:

$$(a, 0) \leftrightarrow a, \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad (1.12)$$

e tale *corrispondenza* gode della seguente *proprietà*:

¹Con linguaggio tecnico il verificarsi di tale fatto si esprime dicendo che il sottoinsieme $\mathbb{C}'$ di $\mathbb{C}$ è *chiuso* rispetto alle *operazioni* di *addizione* e *moltiplicazione*.

- se *addizioniamo* o *moltiplichiamo* due numeri di $\mathbb{C}'$ ed i numeri di $\mathbb{R}$ ad essi *corrispondenti* secondo la (1.12), anche la *somma* e il *prodotto* si *corrispondono*.

Si ha infatti:

$$(a, 0) + (a', 0) = (a + a', 0 + 0) = (a + a', 0) \leftrightarrow a + a'.$$

e

$$(a, 0) \cdot (a', 0) = (a \cdot a' - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot a') = (a \cdot a', 0) \leftrightarrow a \cdot a'.$$

Il verificarsi di tale circostanza, con linguaggio tecnico, si esprime dicendo che gli insiemi $\mathbb{C}'$ ed $\mathbb{R}$ sono due *insiemi isomorfi* rispetto alle operazioni di *addizione* e *moltiplicazione* in essi introdotte e la *corrispondenza* (1.12) che li lega, si chiama *isomorfismo* tra $\mathbb{C}'$ e $\mathbb{R}$.

Nel seguito, per esprimere che $\mathbb{C}'$ e $\mathbb{R}$ sono due *insiemi isomorfi*, scriveremo:

$$\mathbb{C}' \leftrightarrow \mathbb{R} \quad .$$

Poiché le *operazioni di sottrazione e divisione* e la *definizione di potenza n -esima* di un numero complesso poggiano sulle *operazioni di addizione e moltiplicazione*, è facile convincersi che quanto abbiamo detto circa le *somme* ed i *prodotti* dei numeri che si corrispondono nell'isomorfismo (1.12) vale anche per le *differenze*, i *quozienti* e le *potenze n -esime*.

Per quanto riguarda invece le *radici n -esime* di un numero $a \in \mathbb{R}$ e del numero ad esso corrispondente $(a, 0) \in \mathbb{C}'$, ciò che si può dire è questo:

- poiché, come vedremo nel *paragrafo 1.12*, il numero complesso $(a, 0)$ ha n *radici n -esime* in $\mathbb{C}$ mentre il numero reale a ne ha: *nessuna, una o due* in $\mathbb{R}$, si corrispondono secondo l'*isomorfismo* (1.12) solamente le *radici n -esime* di $(a, 0)$ che appartengono a $\mathbb{C}'$ e le *radici n -esime* di a ; se il numero reale a non ha quindi alcuna radice n -esima in $\mathbb{R}$, nessuna delle *radici n -esime* del numero complesso $(a, 0)$ appartiene a $\mathbb{C}'$.

Concludendo possiamo allora dire:

- L'insieme $\mathbb{R}$ non è un sottoinsieme di $\mathbb{C}$ ma è *isomorfo* al sottoinsieme $\mathbb{C}'$ di esso; in simboli:

$$\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{C}' \subset \mathbb{C}. \quad (1.13)$$

Il fatto che $\mathbb{C}'$ e $\mathbb{R}$ siano *isomorfi* consente di riguardarli come due *rappresentazioni distinte* di uno stesso “oggetto matematico” che prende il nome di *struttura algebrica*²

Non possiamo qui dilungarci su tale questione perché ci porterebbe lontano; l'unica cosa che vogliamo invece dire, per fissare le idee, è che $\mathbb{C}'$ e $\mathbb{R}$ sono l'analogo di due “formule” distinte che rappresentano la *legge d'associazione di una data funzione* per cui si può passare dall'uno all'altro a seconda dell'esigenza del problema da studiare.

L'*isomorfismo* esistente tra $\mathbb{C}'$ e $\mathbb{R}$ ed il fatto che $\mathbb{C}'$ sia un *sottoinsieme* di $\mathbb{C}$ ci consente:

1. di concludere che $\mathbb{C}$ è un “ampliamento” di $\mathbb{R}$ e quindi di legittimare la scrittura:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

che sarebbe priva di senso dal punto di vista della *teoria degli insiemi*.

2. di chiamare i numeri di $\mathbb{C}'$, *numeri complessi reali*, mentre quelli dell'insieme

$$\mathbb{C}'' = \{(a, b) \in \mathbb{C} : a = 0\}$$

vengano chiamati *numeri complessi immaginari*.

3. di formulare due *regole di comportamento* per operare con essi.

²Tratteremo ampiamente tale questione nel libro “Relazioni d'equivalenza, d'ordine e strutture algebriche” della collana “Algebra lineare e geometria analitica a portata di clic”.