

Figura 1.25

possiamo allora concludere:

- le restrizioni di f aventi per dominio $(-\infty, -1)$ e $(-1, 0)$ sono convesse; mentre la restrizione di dominio $(0, +\infty)$ è concava; il punto $x_0 = 0$ è punto di flesso.

11. I punti del diagramma di cui è facile calcolare le coordinate sono $P_1(0, f(0)) = P_1(0, -\frac{\pi}{4})$ e $P_2(x, 0) = P_2(1, 0)$.

Il diagramma è allora:

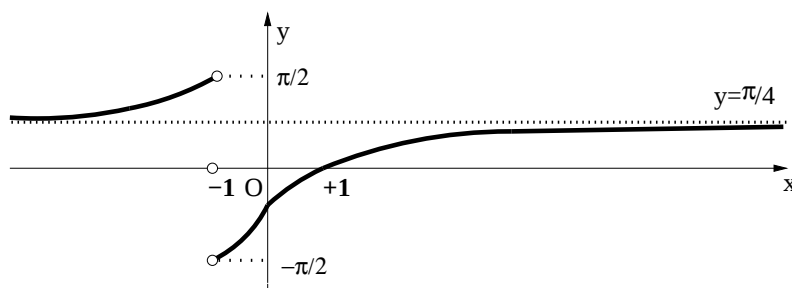


Figura 1.26

Gli esempi esaminati ci potrebbero lasciare la convinzione che lo schema dato per disegnare i diagrammi delle funzioni “vada sempre bene”.

Le cose non stanno purtroppo così. A mostrarcelo sarà il prossimo esempio.

Esempio 1.19 Disegnare il diagramma della funzione f la cui legge d'associazione è rappresentata dalla formula:

$$y = x \cdot \sin \frac{1}{x}$$

Seguiamo lo schema!

$$1. \quad f : y = f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x} \quad , \quad x \in A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

2. si tratta di una funzione pari, il dominio è infatti simmetrico rispetto allo zero e

$$f(-x) = (-x) \cdot \sin \frac{1}{-x} = -x \cdot \left(-\sin \frac{1}{x} \right) = x \cdot \sin \frac{1}{x} = f(x)$$

quindi basta studiare la restrizione di dominio $A' = (0, +\infty)$ e poi completare il diagramma.

3. f è continua perché prodotto di funzioni continue quindi non ha punti di discontinuità

4. f ha $x_0 = 0$ come suo unico punto singolare

5. Studio del punto singolare $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$$

quindi il punto $x_0 = 0$ è un punto singolare eliminabile

6. Poiché il dominio A' è illimitato superiormente, facciamo l'operazione di limite per $x \rightarrow +\infty$; si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \sin \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

quindi la retta di equazione $y = 1$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$.

7. Calcolo della derivata prima; si ha:

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cdot \cos x \quad ;$$

poiché tale formula ha senso per ogni $x \in A'$, concludiamo che f è derivabile e quindi in ogni punto del diagramma esiste la retta tangente e non è verticale in nessun punto.

Fino a qui tutto è andato liscio però ora non siamo in grado di studiare il segno di f' per cui lo schema dato non è operativo.

E allora?

Si arriva a costruire il diagramma della f ripetendo lo stesso ragionamento fatto a pagina 41 per disegnare il diagramma della funzione

$$f : y = f(x) = \begin{cases} |x| \cdot (1 + \sin^2 \frac{1}{x}) & , x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Non ci vogliamo attardare su tale questione, ma invitiamo lo Studente a disegnare il diagramma della funzione in istudio seguendo gli stessi passi là fatti.

Se avrà ragionato correttamente, sarà arrivato alle seguenti conclusioni:

- 1. il diagramma della restrizione della f avente per dominio A' è compreso tra le bisettrici del primo e del quarto quadrante*
- 2. il diagramma “tocca” la bisettrice del primo quadrante nei punti le cui ascisse sono soluzioni dell’equazione $\sin \frac{1}{x} = 1$ e la bisettrice del quarto in quelli le cui ascisse sono soluzioni dell’equazione $\sin \frac{1}{x} = -1$.*
- 3. il diagramma “taglia” l’asse delle x nei punti le cui ascisse sono soluzioni dell’equazione $\sin \frac{1}{x} = 0$.*

Il diagramma è:

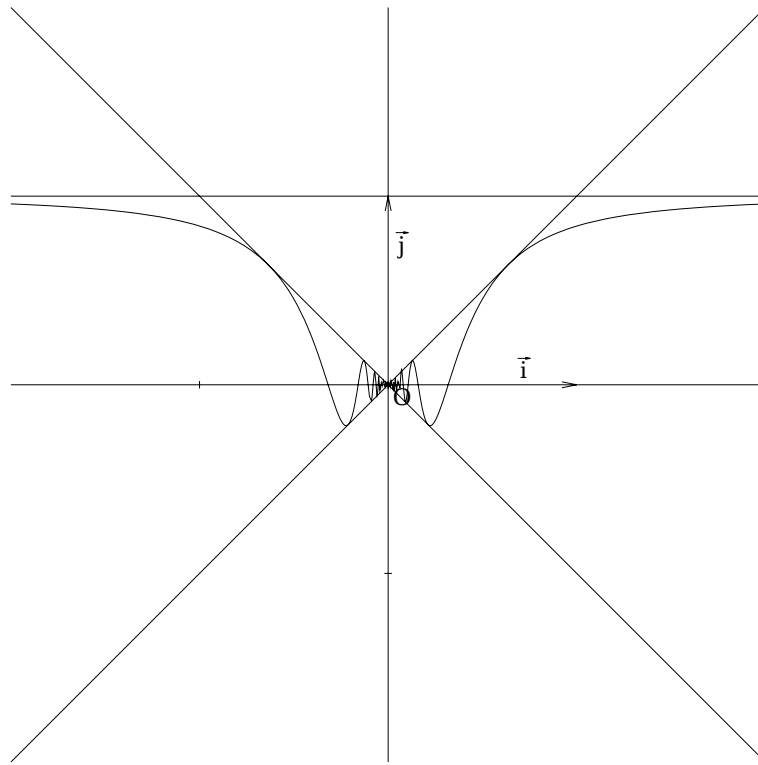


Figura 1.27: Il diagramma è stato tracciato con il programma *Mathplot* che inserisce i vettori $\vec{i}$ e $\vec{j}$ degli assi cartesiani. Non avendo ancora parlato di *versori*, si prega lo Studente di non tener conto della loro presenza.

L'esempio ora considerato ci suggerisce la seguente riflessione:

- la funzione f' è una “funzione spia” per la funzione f ; il “prezzo” delle sue informazioni consiste nel risolvere le disequazioni $f'(x) > 0$ e $f'(x) < 0$ e, se la formula che rappresenta la legge d'associazione della f' è un po' complicata, non possiamo pagarla perché non le sappiamo risolvere.

In questo caso lo schema che abbiamo elaborato per disegnare i diagrammi può essere di valido aiuto fino al punto 6.