

1.17 Come si trovano gli estremi di un insieme

Finora abbiamo definito gli estremi di un insieme (non vuoto), abbiamo elencato le proprietà di cui godono, però non abbiamo detto come si possa trovarli in pratica.

Dato il carattere elementare di questo libro, non vogliamo fare una trattazione completa di tale questione, ma semplicemente esaminare alcuni esempi per renderci conto delle difficoltà che s'incontrano e dei mezzi che abbiamo per superarle.

Nel libro "Limiti e continuità" torneremo poi a parlare di estremi di un insieme per metterli in relazione con il concetto di *punto di accumulazione* (di un insieme), indispensabile per poter formalizzare l'operazione di limite.

Esempio 1.6 Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Poiché A è un insieme finito, esso ha il minimo: $m = 1$ ed il massimo $M = 5$; i suoi estremi sono pertanto $\lambda = m = 1$ e $\Lambda = M = 5$.

Qui non abbiamo incontrato alcuna difficoltà.

Esempio 1.7 Sia $A = (-3, 8] \cup (10, 21]$. È facile convincersi che l'insieme A è limitato, non ha minimo ma ha il massimo: $M = 21$. Il suo estremo inferiore è $\lambda = -3$ ed il suo estremo superiore è $\Lambda = M = 21$.

Neanche qui abbiamo incontrato alcuna difficoltà!

Esempio 1.8 Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : x = 1 + 1/n, \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$. Come si vede, si tratta di un insieme, definito per comprensione, i cui elementi x si ottengono sostituendo successivamente, al posto di n , i numeri naturali $1, 2, 3, \dots$ nella "formula":

$$x = 1 + 1/n \tag{1.17}$$

Dalla (1.17) si vede chiaramente come all'aumentare del valore attribuito alla lettera n , diminuisce il valore dell'elemento x corrispondente.

Questa osservazione ci permette di concludere che:

- * *l'insieme A ha il massimo che si ottiene per $n = 1$: $M = 1 + 1/1 = 2$, pertanto ha l'estremo superiore: $\Lambda = M = 2$*
- * *l'insieme A non ha il minimo, però è limitato inferiormente perché qualunque sia il valore attribuito a n , il numero $1/n$ risulta maggiore di 0 e pertanto si ha:*

$$x = 1 + 1/n > 1$$

Il numero 1 e tutti i numeri minori di esso, sono quindi minoranti di A .

Qual'è l'estremo inferiore di A ?

Ricordando che, se un insieme non ha il minimo, l'estremo inferiore è "il più grande" dei suoi minoranti, potremo concludere che l'estremo inferiore è il numero 1 se faremo vedere che non esiste alcun minorante di A maggiore di 1.

Ma come si fa a vedere ciò?

Con questo "piccolo trucco"!

Denotiamo con la lettera greca ε (si legge "épsilon") il generico numero reale positivo ed esprimiamo con $1 + \varepsilon$ il generico numero più grande di 1; al variare di ε in $(0, +\infty)$ si ottengono ovviamente tutti i numeri più grandi di 1 e quindi anche i minoranti di A maggiori di 1, se ce ne sono.

Ma ce ne sono?

Bene, se qualunque sia il valore positivo attribuito ad ε esiste almeno un numero naturale n^ (dipendente da ε) che sostituito alla lettera n nella (1.17) dia luogo ad un elemento $x^* = 1 + 1/n^*$ minore di $1 + \varepsilon$, vuol dire che non esiste alcun minorante di A che si possa scrivere come $1 + \varepsilon$, quindi maggiore di 1, e pertanto 1 è l'estremo inferiore di A .*

Ma numeri naturali n^* siffatti esistono? E se esistono, come si trovano?

Le risposte si hanno risolvendo la disequazione

$$1 + 1/n < 1 + \varepsilon \tag{1.18}$$

avente n per incognita ed ε per parametro.

Se, qualunque sia il valore positivo attribuito ad ε , la disequazione (1.18)

ha qualche soluzione n^* in $\mathbb{N}$, il numero n^* , sostituito al posto di n nella (1.17) dà luogo appunto ad un elemento $x^* \in A$ più piccolo di $1 + \varepsilon$ e pertanto quest'ultimo non è minorante.

Risolvendo finalmente la (1.18), si ottiene

$$n > 1/\varepsilon \quad ;$$

la disequazione (1.18) ha quindi infinite soluzioni in $\mathbb{N}$, pertanto esistono addirittura infiniti elementi di A minori di $1 + \varepsilon$ (qualunque sia il valore attribuito ad ε) ed allora l'estremo inferiore di A è 1: $\lambda = 1$.

Ha capito il trucco e come abbiamo ragionato?

Ad ogni modo rilegga quest'esempio e se lo fissi bene in mente!

Per vedere se ha assimilato veramente la tecnica utilizzata, seguendo gli stessi passi, trovi gli estremi di quest'altro insieme:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = 5 + 1/n^2, \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$$

I risultati a cui perverrà, se avrà ragionato correttamente, saranno:

$$\lambda = 5, \Lambda = M = 6$$

Diamo ora un altro esempio, in cui mettiamo a punto una tecnica simile per trovare l'estremo superiore di un insieme dato per comprensione, limitato superiormente ma che non abbia massimo.

Esempio 1.9 Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : x = 1 - 1/n, \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$. È facile, ragionando come nell'esempio precedente, constatare che tale insieme ha il minimo $m = 0$, è limitato superiormente dal numero 1, però non ha il massimo.

Qual'è il suo estremo superiore?

Il "più piccolo" dei maggioranti che si vede "ad occhio nudo" è 1.

Sarà forse 1 l'estremo superiore o esiste qualche maggiorante più piccolo?

Poiché ogni numero minore di 1 può essere espresso come $1 - \varepsilon$, concluderemo che il più piccolo dei maggioranti è 1 se esiste qualche numero $x \in A$ che sia maggiore di $1 - \varepsilon$; ciò avviene se la disequazione

$$1 - 1/n > 1 - \varepsilon \quad (1.19)$$

ha qualche soluzione in $\mathbb{N}$, qualunque sia il valore positivo attribuito ad ε .

Risolvendo la (1.19) si ha:

$$n > 1/\varepsilon$$

1 è pertanto il più piccolo dei maggioranti cioè l'estremo superiore di A : $\Lambda = 1$.

Per terminare questo argomento, diamo un ultimo esempio in cui le tecniche viste per la ricerca degli estremi non si applicano immediatamente.

Esempio 1.10 Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : x = 1 + (-1)^n/n, \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$. Detti $\mathbb{N}_d$ e $\mathbb{N}_p$ i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ costituiti rispettivamente dai numeri dispari e dai numeri pari, consideriamo i due sottoinsiemi di A :

$$\begin{aligned} A_d &= \{x \in \mathbb{R} : x = 1 + (-1)^n/n, \text{ con } n \in \mathbb{N}_d\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x = 1 - 1/n, \text{ con } n \in \mathbb{N}_d\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_p &= \{x \in \mathbb{R} : x = 1 + (-1)^n/n, \text{ con } n \in \mathbb{N}_p\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x = 1 + 1/n, \text{ con } n \in \mathbb{N}_p\} \end{aligned}$$

Poiché $A_d \cup A_p = A$, possiamo qui cercare separatamente gli estremi λ_d, Λ_d di A_d e λ_p, Λ_p di A_p per poi applicare la proprietà 4 degli estremi vista nel paragrafo 1.16, cioè:

$$\lambda = \min\{\lambda_d, \lambda_p\}, \quad \Lambda = \max\{\Lambda_d, \Lambda_p\}.$$

Facendo i calcoli, che lasciamo come esercizio allo Studente, si arriva alle seguenti conclusioni:

$$\lambda_d = m_d = 0, \Lambda_d = 1, \lambda_p = 1, \Lambda_p = M_p = 3/2 \text{ e pertanto } \lambda = 0, \Lambda = 3/2.$$

Non insistiamo ulteriormente su tale questione, dato il carattere elementare del libro, tuttavia speriamo di aver dato, con gli esempi esaminati, uno spunto allo Studente interessato.

Introduciamo ora alcuni insiemi “famosi” in matematica.