

Capitolo 2

Teoria dell'integrazione secondo Riemann per funzioni reali di una variabile reale

Esistono varie *teorie dell'integrazione*; tutte hanno come comune “antenato” il “metodo di esaustione” utilizzato dai Greci per calcolare l'*area* di figure geometriche a contorno curvilineo: cerchio, ellisse, segmento di parabola, ecc, ...

Tale metodo è noto allo Studente fin dal Liceo per cui non vogliamo qui parlarne di nuovo.

In questo Capitolo vogliamo invece:

- Esporre la *teoria dell'integrazione secondo Riemann* per funzioni reali di una variabile reale.

Prima di iniziare l'esposizione, diciamo qual è l'*idea* che sta alla base di ogni *teoria dell'integrazione*.

2.1 L'idea di fondo

In ogni *teoria dell'integrazione* si fanno due cose:

- I. Si fissa un insieme di funzioni che chiamiamo *famiglia di funzioni*.

- II. Si dà un “procedimento” mediante il quale si cerca di associare ad ogni funzione della famiglia fissata un numero, oppure $\pm\infty$ cioè un *elemento* di $\tilde{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. Nel seguito chiameremo tale “procedimento”, “procedimento di associazione”.

Le funzioni (della famiglia fissata), alle quali si riesce ad associare tale elemento, sono dette *funzioni integrabili* e l'elemento (associato) è chiamato *integrale della funzione*.

Le funzioni (della famiglia fissata), alle quali non si riesce invece ad associare alcun elemento di $\tilde{\mathbb{R}}$, sono dette *funzioni non integrabili*.

Se una funzione non appartiene alla *famiglia fissata*, per essa non ha senso dire nè che è *integrabile* nè che *non lo è*.

Da quanto premesso segue che una *teoria dell'integrazione* differisce da un'altra:

- o per la “famiglia di funzioni” fissata,
- o per il “procedimento di associazione” usato.

Passiamo ora ad esporre la *teoria dell'integrazione secondo Riemann* per le funzioni reali di una variabile reale.

2.2 Teoria dell'integrazione secondo Riemann

Riemann fissa la *famiglia di funzioni reali* di una variabile reale le quali verificano le seguenti ipotesi:

1. hanno per dominio un *intervallo chiuso e limitato* $[a, b]$
2. sono *limitate* cioè è limitato il loro codominio

Nel seguito denoteremo tale *famiglia* con il simbolo $\mathfrak{F}_R^1$.

¹Nella famiglia $\mathfrak{F}_R$ vi sono sia *funzioni continue*, sia funzioni con un *numero finito* di *punti di discontinuità*, sia funzioni con *infiniti punti di discontinuità*.

Il “procedimento di associazione” usato da Riemann è questo:

- Assegnata una funzione $f : y = f(x)$, $x \in [a, b]$ della famiglia $\mathfrak{F}_R$, si effettua una *decomposizione* D del suo dominio $[a, b]$ in n *intervalli parziali*:

$$\begin{aligned} I_1 &= [x_0, x_1] \\ I_2 &= [x_1, x_2] \\ \dots &\dots \dots \\ I_n &= [x_{n-1}, x_n] \end{aligned}$$

e si considerano le n *restrizioni* di f aventi per *domini* i suddetti *intervalli*.

Siccome f è *limitata*, anche le sue n *restrizioni* considerate lo sono; siano rispettivamente $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ i loro *estremi inferiori* e $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ i loro *estremi superiori*².

Una volta calcolati tali estremi, si costruiscono i due numeri:

$$\begin{aligned} s &= \lambda_1 \cdot \text{mis } I_1 + \lambda_2 \cdot \text{mis } I_2 + \dots + \lambda_n \cdot \text{mis } I_n = \\ &= \lambda_1 \cdot (x_1 - x_0) + \lambda_2 \cdot (x_2 - x_1) + \dots + \lambda_n \cdot (x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S &= \Lambda_1 \cdot \text{mis } I_1 + \Lambda_2 \cdot \text{mis } I_2 + \dots + \Lambda_n \cdot \text{mis } I_n = \\ &= \Lambda_1 \cdot (x_1 - x_0) + \Lambda_2 \cdot (x_2 - x_1) + \dots + \Lambda_n \cdot (x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

che prendono rispettivamente il nome di *somma inferiore* e *somma superiore di Riemann* relative alla decomposizione D .

Per ricordare la dipendenza di tali somme dalla funzione f e dalla decomposizione D , nel seguito le denoteremo rispettivamente con i *simboli*

²Per il *teorema di Weierstrass* sicuramente gli *estremi* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ e $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ appartengono ai codomini delle *restrizioni* di f se queste ultime sono funzioni continue. Vedere il *paragrafo 3.5* del libro “Limiti e continuità”.