

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0 \quad \text{ove } x_0 \in (-\infty, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \arcsin x = \arcsin x_0 \quad \text{ove } x_0 \in [-1, 1]$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0 \quad \text{ove } x_0 \in (-\infty, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \arccos x = \arccos x_0 \quad \text{ove } x_0 \in [-1, 1]$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \arctan x = \arctan x_0 \quad \text{ove } x_0 \in (-\infty, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arccotan} x = \operatorname{arccotan} x_0 \quad \text{ove } x_0 \in (-\infty, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccotan} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccotan} x = \pi$$

Andiamo finalmente a vedere come si esegue nella pratica l'operazione di limite, cioè rispondiamo all'obiettivo 6.

2.10 Come si esegue nella pratica l'operazione di limite

Affrontiamo finalmente il problema di come effettuare un'operazione di limite su una funzione la cui legge d'associazione è assegnata mediante una "formula".

Vediamo come i teoremi enunciati nel paragrafo 2.8 ci danno una mano!

Si consiglia di procedere così:

1. *analizzare* le operazioni indicate nella “formula” che rappresenta la legge d’associazione della funzione e *decidere* se si tratta di una *funzione somma, prodotto, quoziente, ...*; in altre parole individuare a partire da quali funzioni è stata costruita la funzione in istudio.

Chiameremo queste ultime *funzioni – mattone*.

Ciascuna funzione – mattone a sua volta può essere:

- o una *funzione elementare*
- o una funzione somma, prodotto, quoziente, ecc. di funzioni elementari.

2. *effettuare l’operazione di limite* su ciascuna funzione – mattone
3. *utilizzare* qualcuno dei teoremi enunciati nel paragrafo 2.8 per dedurre, dai limiti delle funzioni – mattone, il limite della funzione su cui si sta operando.

Prima di sperimentare tale procedimento su degli esempi, facciamo qualche commento.

Tutto il gioco consiste nel dedurre, per mezzo di qualcuno dei teoremi del paragrafo 2.8, dai limiti delle *funzioni elementari* (che sono noti) i limiti delle *funzioni – mattone* e da questi ultimi, sempre per mezzo di qualcuno dei teoremi del paragrafo 2.8, il limite della funzione in esame.

Il procedimento quindi può “bloccarsi” in due situazioni:

1. quando non si riesce ad effettuare l’operazione di limite su qualche funzione – mattone perchè non sono verificate le ipotesi del teorema che si dovrebbe applicare.
2. quando, pur conoscendo i limiti di tutte le funzioni – mattone, da essi non si può dedurre il limite della funzione in esame sempre perchè non sono verificate le ipotesi del teorema che si dovrebbe applicare.

In entrambe le situazioni siamo in presenza di uno dei casi di indecidibilità.

Che fare allora?

Si cerca di rappresentare la legge d'associazione della funzione in istudio per mezzo di un'altra formula¹¹ e si riapplica il “procedimento” descritto nella speranza di non incontrare di nuovo un “caso di indecidibilità”.¹²

Illustriamo il metodo consigliato su alcuni esempi.

Esempio 2.3 *Supponiamo che si debba effettuare l'operazione di limite*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x)$$

La funzione su cui si deve operare è $f : y = f(x) = x^2 + x$, $x \in A = (-\infty, +\infty)$.

Si tratta di una funzione somma di due funzioni (*funzioni – mattone*):

$$\begin{aligned} f_1 : y = f_1(x) &= x^2, \quad x \in A = (-\infty, +\infty) \\ f_2 : y = f_2(x) &= x, \quad x \in A = (-\infty, +\infty); \end{aligned}$$

entrambe sono funzioni elementari e, per $x \rightarrow +\infty$, hanno per limite $l = +\infty$.

Il Teorema 2.17.4 ci permette di concludere che $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x) = +\infty$.

Se invece, sempre sulla stessa funzione, vogliamo effettuare quest'altra operazione di limite:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x) \tag{2.32}$$

ci troviamo di fronte al caso di indecidibilità: $+\infty - \infty$, perché $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = -\infty$.

¹¹Osserviamo che per la costruzione di quest'ultima si parte dalla “formula” mediante la quale è assegnata inizialmente la legge d'associazione; per trovarla non ci sono però “ricette” da suggerire.

¹²Se rappresentiamo la legge d'associazione per mezzo di un'altra “formula”, la funzione stessa resta costruita a partire da altre *funzioni – mattone*; da qui la speranza che qualcuno dei teoremi enunciati ci risolva il problema.