

Capitolo 1

Ricerca delle primitive (espresse in termini di funzioni elementari) di funzioni continue i cui domini siano intervalli

L'obiettivo del *Capitolo* è:

Far acquisire allo Studente una “buona manualità” nell’uso degli “strumenti di lavoro” di cui disponiamo per la ricerca delle *primitive* (o *calcolo degli integrali*) di una *funzione continua* assegnata, il cui *dominio* sia un *intervallo*.

Vediamo quali sono gli “strumenti di lavoro”!

1.1 Strumenti di lavoro per la ricerca delle primitive (o calcolo degli integrali) di una funzione continua avente per dominio un intervallo

Gli “strumenti di lavoro” sono cinque:

- la *tabella degli integrali fondamentali*

- la *tabella generalizzata*
- Il *metodo di integrazione per decomposizione in somma della funzione integranda*, cioè della *funzione* di cui si cercano le *primitive*
- Il *metodo di integrazione per parti* ¹
- Il *metodo di integrazione per sostituzione*

A questo punto è naturale chiedersi:

- Davanti a un *caso specifico*, cioè davanti ad un *integrale da calcolare*, come si fa a decidere quale dei cinque “strumenti di lavoro” elencati conviene usare?

Prima di dare una risposta a *tale domanda*, facciamo una breve riflessione sui *tre metodi di integrazione citati*.

1.2 Riflessione sui tre metodi d'integrazione

I tre *metodi d'integrazione* citati non forniscono direttamente gli *integrali* della *funzione* a cui si applicano ma spostano il problema del *calcolo dell'integrale* dato:

$$\int f(x)dx$$

al *calcolo di altri integrali* ² e risultano efficaci *se e solo se* si riesce a calcolare questi ultimi.

Questi ultimi sono *sicuramente calcolabili* se le loro *funzioni integrande* si trovano in una delle *due tabelle*:

- *quella degli integrali fondamentali*
- *quella generalizzata*

¹Tali metodi sono basati sulle *proprietà* delle *primitive* riportate nel *paragrafo* 3.4 del “Libro di teoria”; sono stati ampiamente illustrati nei *paragrafi* 3.6, 3.11 e 3.12 del suddetto libro per cui non li trascriviamo di nuovo.

²Se si applica il *metodo di integrazione per parti* oppure il *metodo d'integrazione per sostituzione*, l'*integrale* da calcolare è uno.

Se si applica invece il *metodo di integrazione per decomposizione in somma* di *n termini*, (con $n > 1$), gli *integrali* da calcolare sono *n*.

Quando si utilizza uno di questi *metodi* quindi, non si va in generale “a colpo sicuro” ma si fa semplicemente un tentativo, perché non ci riesce di sapere a-priori se il *metodo* risulterà *efficace* oppure *no*.

Per alcuni *tipi particolari* di *integrali* però, sappiamo a-priori che l'impiego di un dato *metodo di integrazione* va a “buon fine”.

Due casi in cui ciò accade sono questi:

- quando si utilizza il *metodo di integrazione per decomposizione in somma* per calcolare gli *integrali* delle *funzioni razionali* (vedere i *paragrafi* 3.7, 3.8 e 3.9 del “Libro di teoria”).
- quando si utilizza il *metodo di integrazione per sostituzione* per calcolare gli *integrali* delle *funzioni elencate* nei *paragrafi* 3.14 e 3.15 del “Libro di teoria”.

Per queste *ultime funzioni* infatti, usando le *sostituzioni* ivi elencate, il *metodo d'integrazione per sostituzione* trasforma l'*integrale della funzione data* nell'*integrale di una funzione razionale* che, come abbiamo detto, si può a sua volta calcolare usando il *metodo d'integrazione per decomposizione in somma*.

Riassumendo possiamo concludere:

- Le *uniche funzioni* delle quali si possono *calcolare direttamente gli integrali* sono le *funzioni integrande* delle *due tabelle* dianzi citate.

La *conclusione* a cui siamo giunti ci suggerisce l'atteggiamento mentale con cui porsi dinanzi ad un *integrale indefinito da calcolare*.

1.3 Atteggiamento mentale con cui affrontare il calcolo di un integrale indefinito

Quando si deve calcolare un *integrale indefinito*

$$\int f(x) dx$$

cioè quando si devono trovare le *primitive* di una *funzione* di cui $f(x)$ è una *rappresentazione analitica* della sua *legge d'associazione* f , l'*atteggiamento mentale* da assumere è questo:

1. Vedere se la *rappresentazione analitica* $f(x)$ della *legge di associazione* f della *funzione integranda* è *equivalente* a qualcuna delle *rappresentazioni analitiche* delle *leggi di associazione* delle *funzioni integrande* che compaiono nella *Tabella degli integrali fondamentali*. Se lo è, la *funzione integranda* assegnata coincide con quest'ultima, quindi è una *funzione della tabella* e pertanto il problema del *calcolo dei suoi integrali* è risolto.
2. Qualora la *Tabella degli integrali fondamentali* non risolvesse il problema, vedere se vi sono le *condizioni* per usare la *Tabella generalizzata*.
3. Se anche quest'ultima si rivelasse inadeguata, provare con uno dei *tre metodi di integrazione*

Come lo Studente si renderà conto, oltre all'ordine con cui tentare l'utilizzo degli "strumenti di lavoro", non vi è altro da suggerire.

La probabilità di imboccare la via, che ci porta al raggiungimento dell'*obiettivo fissato*, cresce all'aumentare della *cultura matematica* e dell'*esperienza nel settore*.

Facciamoci allora un po' di esperienza, calcolando gli *integrali* di questa *prima lista*!