

Per terminare facciamo alcune riflessioni circa il “procedimento” seguito per dare un significato numerico al simbolo:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

2.22 Riflessioni finali

Nel paragrafo 2.1 per definire la somma degli infiniti termini di una successione $\{a_k\}$ cioè per dare un significato numerico al simbolo $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ abbiamo dato un “procedimento” che nel seguito chiameremo “procedimento ordinario”.

L'idea che lo ha suggerito è questa:

- se dobbiamo sommare $\overline{n}$ numeri in un certo ordine, si comincia con il sommare i primi due, al risultato ottenuto si somma il terzo, quindi al nuovo risultato il quarto e così via fino ad arrivare all'ultimo.

In simboli:

detti $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{\overline{n}}$ gli $\overline{n}$ numeri assegnati, la loro somma è il numero che compare nell'ultima riga della seguente tabella:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\dots\dots\dots$$

$$s_{\overline{n}} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{\overline{n}}$$

Se i numeri da sommare sono gli infiniti termini di una successione $\{a_k\}$ il procedimento illustrato anziché gli $\overline{n}$ numeri:

$$s_1, s_2, \dots\dots\dots, s_{\overline{n}}$$

genera una *successione di numeri*:

$$\{s_n\}$$

e viene spontaneo assumere come *somma* degli infiniti termini della successione $\{a_k\}$ il limite di $\{s_n\}$ se esiste ed è un numero S , cioè

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S ;$$

se invece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \\ \text{non esiste} \end{cases}$$

il “procedimento” fissato non permette di dare un significato numerico al simbolo $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, quindi è purtroppo inefficace. Nonostante questa limitazione, il “procedimento ordinario” ha il pregio di restituire come caso particolare la somma $s_{\bar{n}}$ di un numero finito $\bar{n}$ di numeri: $a_1, a_2, \dots, a_{\bar{n}}$.

Vediamo come!

Se consideriamo una serie $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ i cui termini sono così fatti:

$$b_k = \begin{cases} a_k & \text{se è } k \leq \bar{n} \\ 0 & \text{se è } k > \bar{n} \end{cases}$$

la successione delle sue somme parziali è:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

.....

$$s_{\bar{n}} = a_1 + a_2 + \dots + a_{\bar{n}}$$

$$s_{\bar{n}+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{\bar{n}} + 0 = s_{\bar{n}}$$

.....

$$s_n = s_{\bar{n}} \quad \text{se è } n > \bar{n}$$

e quindi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{\bar{n}} = s_{\bar{n}}.$$

Questo risultato ci autorizza a dire che il “procedimento ordinario” è un’*estensione* della definizione di somma da un *numero finito* ad un

numero infinito di termini e ciò “rende naturale” accettare come *somma* degli infiniti termini di una successione $\{a_k\}$ il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$$

se esiste ed è un numero.

Il “procedimento ordinario”, sebbene “naturale” è sempre una convenzione. Ci chiediamo allora:

- è possibile trovare qualche altro “procedimento” altrettanto “naturale” che magari risulti “più efficace” di quello da noi adottato?

Andiamo a vedere!

Se una serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge, secondo il “procedimento ordinario”, ciascuna delle sue somme parziali $s_1, s_2, \dots, s_n$ dà un *valore approssimato* della sua *somma* S che in generale non si riesce a calcolare.

Si può pensare di ottenere una *migliore approssimazione* di S , a parità di n , considerando le *medie aritmetiche* delle somme parziali $s_1, s_2, \dots, s_n$, cioè:

$$\begin{aligned} s'_1 &= s_1 \\ s'_2 &= \frac{s_1 + s_2}{2} \\ s'_3 &= \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3} \\ &\dots\dots\dots \\ s'_n &= \frac{s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n}{n}. \end{aligned}$$

Questa idea, per ora un po' vaga, porta alla costruzione di quest'altro procedimento per definire la somma di infiniti termini.

Illustriamolo!

Tale “procedimento” dovuto a Cesàro consiste nel fare tre cose:

- a) nel costruire la successione:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$