

Indice

Prefazione	vii
1 Matrici e sistemi lineari	1
1.1 Le matrici di numeri reali	1
1.2 Nomenclatura in uso per le matrici	3
1.3 Matrici ridotte per righe e matrici ridotte per colonne . .	7
1.4 Operazioni sulle matrici	8
1.5 Operazione di moltiplicazione riga per colonna tra due matrici	11
1.6 Trasformazioni elementari di una matrice	16
1.7 Matrice invertibile e matrice inversa di una matrice . . .	18
1.8 Permutazioni dell'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$	20
1.9 Determinante di una matrice quadrata	22
1.10 Calcolo dei determinanti di matrici quadrate di ordine 2 e 3	26
1.11 Proprietà dei determinanti che discendono dalla definizione	28
1.12 Complemento algebrico di un elemento di una matrice ed altre rappresentazioni del determinante	29
1.13 Un commento sulla struttura delle formule (1.20) e (1.21)	31
1.14 Altre proprietà dei determinanti	32
1.15 Regole di calcolo dei determinanti	36
1.16 Condizione di invertibilità di una matrice e matrice inversa	37
1.17 Un procedimento alternativo per il calcolo della matrice inversa	40
1.18 Due domande sulla matrice inversa	44
1.19 Potenza di una matrice	46

1.20	Rango di una matrice	48
1.21	Studio dei sistemi lineari	50
1.22	Teoremi di Cramer e Rouché-Capelli	51
1.23	Metodo di Gauss	56
1.24	Principio di induzione	57
1.25	Uso del principio di induzione nella risoluzione dei problemi	60
2	Teoria dei vettori geometrici dello spazio euclideo	67
2.1	Definizione di vettore geometrico dello spazio euclideo . .	67
2.2	Alcune definizioni	69
2.3	Operazione di addizione	75
2.4	Operazione di moltiplicazione di un numero (scalare) per un vettore	77
2.5	Operazione di prodotto scalare	79
2.6	Componente ortogonale di un vettore rispetto ad un altro vettore	81
2.7	Operazione di prodotto vettoriale	84
2.8	Operazione di prodotto misto	86
2.9	Spazio vettoriale e spazio euclideo dei vettori geometrici .	86
2.10	Dipendenza ed indipendenza lineare tra vettori di $\mathcal{V}$. . .	88
2.11	Dimensioni e basi dello spazio vettoriale $\mathcal{V}$	92
2.12	Come varia la terna di coordinate di un vettore $\underline{v} \in \mathcal{V}$ al variare della base scelta in $\mathcal{V}$	95
2.13	Spazio vettoriale orientato	98
2.14	Relazioni tra le coordinate dei vettori: $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{u}+\underline{v}$, $\lambda\underline{u}$. . .	100
2.15	Concetto di sottospazio	102
2.16	Esistenza di sottospazi e costruzione di essi a partire da vettori di $\mathcal{V}$	102
2.17	Dimensione dei sottospazi e relazione tra sistema di gene- ratori e basi del sottospazio	104
2.18	Rette vettoriali e piani vettoriali	106
2.19	Sottospazi intersezione e sottospazi somma	107
2.20	Relazione di Grassmann	112
2.21	Sottospazi supplementari	112
2.22	Riassunto dei concetti definiti nello spazio vettoriale $\mathcal{V}$.	113

2.23	Concetti tipici dello spazio vettoriale euclideo $\mathcal{E}$	114
2.24	Sottospazi ortogonali e supplementare ortogonale di un sottospazio di $\mathcal{E}$	116
2.25	Vettore simmetrico di un vettore $\underline{v} \in \mathcal{E}$ rispetto ad un sottospazio di $\mathcal{E}$	118
2.26	Procedimento di Gram-Schmidt	119
2.27	Espressione analitica del prodotto scalare	124
2.28	Commenti alla matrice di Gram	126
2.29	Relazione tra le coordinate dei vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{u} \wedge \underline{v}$	130
2.30	Espressione analitica del prodotto misto	132
2.31	Le operazioni di prodotto vettoriale e di prodotto misto nei sottospazi	133
3	Spazio vettoriale reale e spazio vettoriale euclideo reale	135
3.1	Definizione di legge di composizione interna e di legge di composizione esterna ad un insieme	135
3.2	Considerazioni che hanno portato alla definizione astratta di spazio vettoriale	136
3.3	Definizione astratta di spazio vettoriale	138
3.4	Riflessione sulla definizione astratta (o assiomatica) di spa- zio vettoriale	139
3.5	Esempi di spazi vettoriali	144
3.6	Dimensione e basi di uno spazio vettoriale V	146
3.7	Sottospazi di uno spazio vettoriale di dimensione finita V	149
3.8	Dimostrazione della relazione di Grassmann	152
3.9	Ancora sui sistemi di generatori di sottospazi di V	155
3.10	Metodo degli scarti successivi	158
3.11	Dimensione e basi dello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^n$ e dei suoi sottospazi	161
3.12	Un'altra lettura delle matrici e del rango di una matrice	162
3.13	Come calcolare il rango di una matrice	168
3.14	Metodo di riduzione per righe o per colonne	171
3.15	Ancora due domande sui sottospazi di $\mathbb{R}^n$	172
3.16	Rappresentazione implicita di un sottospazio di $\mathbb{R}^n$	173

3.17	Tecniche di passaggio tra i due modi di assegnare un sottospazio di $\mathbb{R}^n$	176
3.18	Risposta alla domanda 7	180
3.19	Sistemi lineari di equazioni vettoriali	180
3.20	Come definire l'operazione di prodotto scalare tra i vettori di uno spazio vettoriale V	183
3.21	Operazione di prodotto scalare e spazio vettoriale euclideo	184
3.22	Esempi di spazi vettoriali euclidei	186
3.23	Norma di un vettore di uno spazio vettoriale euclideo	187
3.24	Dimostrazione della disuguaglianza di Schwartz e definizione di angolo tra due vettori	188
3.25	Altre proprietà della norma di un vettore	191
3.26	Prodotto scalare tra due vettori e matrice di Gram	192
4	Applicazioni lineari	195
4.1	Concetto di applicazione lineare	195
4.2	Nomenclatura in uso	196
4.3	Esempi di applicazioni lineari	197
4.4	Proprietà delle applicazioni lineari	198
4.5	Conseguenze delle relazioni (4.5), (4.6) e dell'essere $\text{Ker } f = \{0_V\}$	203
4.6	Altre proprietà delle applicazioni lineari	206
4.7	Isomorfismi e spazi vettoriali isomorfi	209
4.8	Un metodo per trovare la dimensione ed una base di uno spazio vettoriale V assegnato	210
4.9	Quali sono gli spazi vettoriali isomorfi	213
4.10	Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ come strumento di calcolo	215
4.11	Rappresentazione della legge d'associazione di una applicazione lineare per mezzo di matrici	217
4.12	Riflessioni sopra la matrice A	219
4.13	Un metodo per studiare le applicazioni lineari	222
4.14	Riflessioni sopra i sistemi lineari	227
4.15	Isomorfismo tra gli spazi $\mathcal{L}(V, W)$ e $\mathbb{R}^{m,n}$	229
4.16	Relazione tra matrici simili	230
4.17	Autovalori ed autovettori di un endomorfismo	233

4.18	Definizione di autospazio e relazione tra autovettori appartenenti ad autospazi distinti	235
4.19	Come si calcolano gli autovalori e si trovano gli autospazi di un endomorfismo	238
4.20	Quando un endomorfismo è diagonalizzabile	243
4.21	L'applicazione aggiunta di una applicazione lineare . . .	245
4.22	Formula di aggiunzione in termini di matrici	248
4.23	Endomorfismi autoaggiunti	251
4.24	Diagonalizzabilità degli endomorfismi autoaggiunti . . .	254
4.25	Relazioni tra i sottospazi (4.87)	261
4.26	Isomorfismi ortogonali	264
4.27	Caratterizzazione degli isomorfismi ortogonali	265
4.28	Proprietà degli isomorfismi ortogonali	267
4.29	Automorfismi ortogonali	271
5	Forme bilineari e forme quadratiche	273
5.1	Forme bilineari	273
5.2	Spazio vettoriale delle forme bilineari su V e due sottospazi di esso	275
5.3	Forme quadratiche	278
5.4	Due considerazioni sulle forme quadratiche	282
5.5	Forme bilineari simmetriche e prodotti scalari	283
5.6	Definizione di vettori coniugati e nucleo di una forma bilineare simmetrica	285
5.7	Proprietà dei vettori coniugati; basi di vettori coniugati a due a due	290
5.8	Rappresentazione analitica della legge d'associazione di una forma bilineare simmetrica	296
5.9	Riflessioni sulla matrice A associata ad una forma bilineare simmetrica su V rispetto ad una base B_V fissata in V . .	298
5.10	Equazione del nucleo di una forma bilineare simmetrica .	300
5.11	Studio del segno di una forma quadratica per mezzo di matrici	302
5.12	Come studiare una forma bilineare simmetrica	308

5.13 Studio delle forme bilineari simmetriche su uno spazio vettoriale euclideo	311
--	-----